


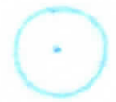
GEOMETRIA EUCLIDEA

NEL PERIODO DAL VI AL III SECOLO A.C. NELL'ANTICA GRECIA LA GEOMETRIA È STATA SVILUPPATA E ORGANIZZATA SECONDO I CANONI DEL METODO ASSIOMATICO CLASSICO, LA CUI CARATTERISTICA PRINCIPALE È CHE VANNO ESPLICITATE LE PROPOSIZIONI ASSUNTE INIZIALMENTE COME VERE E CHE TUTTE LE ALTRE PROPOSIZIONI DEVONO ESSERE DIMOSTRATE A PARTIRE DA ESSE.

ALL'INIZIO DEL PRIMO DEI 13 LIBRI DEGLI "ELEMENTI", SUBITO DOPO UN ELENCO DI 23 DEFINIZIONI DI ENTI GEOMETRICI, EUCLIDE (300 A.C.) ENUNCIA LE PROPOSIZIONI CHE SI ASSUMONO INIZIALMENTE A FONDAMENTO DELL'EDIFICIO DELLA GEOMETRIA, I 5 POSTULATI CHE ENUNCIANO LE PROPRIETÀ DEGLI ENTI GEOMETRICI, VANNO ACCETTATI SENZA DIMOSTRAZIONE E SI POSSONO COSÌ ASSUMERE:

I) CHE SI POSSA CONDUERE UNA RETTA DA QUALSIASI PUNTO A OGNI ALTRO PUNTO 

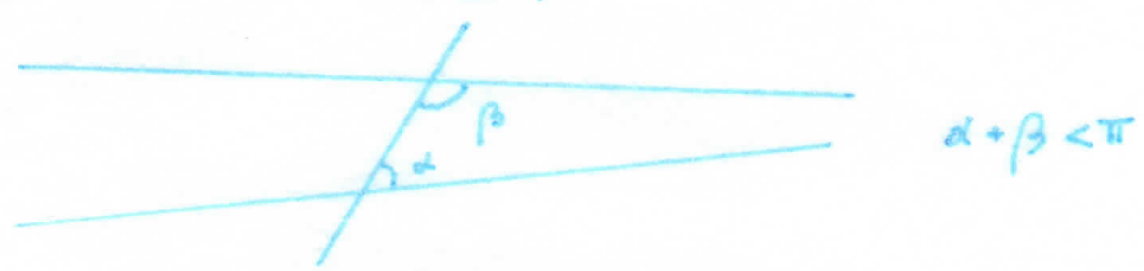
II) E CHE UNA RETTA FINITA SI POSSA PROLUNGARE CONTINUAMENTE IN UNA RETTILINEA

III) E SI POSSA DESCRIVERE UN CERCHIO CON QUALSIASI CENTRO ED OGNI DISTANZA 

IV) E CHE TUTTI GLI ANGOLI RETTI SIANO UGUALI TRA LORO



V) E CHE SE UNA RETTA VENENDO A CADERE SU 2 RETTE FORMA GLI ANGOLI INTERNI E DALLA STESSA PARTE MINORI DI 2 RETTI, LE 2 PROLUNGATE ILLIMITATAMENTE VERRANNO AD INCONTRARSI DA QUELLA PARTE IN CUI SONO GLI ANGOLI MINORI DI 2 RETTI



IL V POSTULATO È EQUIVALENTE ALLA FORMA PIÙ NOTA: DATO UN PUNTO P ESTERNO AD UNA RETTA, PER ESSO PASSA UNA E UNA SOLA PARALLELA ALLA RETTA DATA



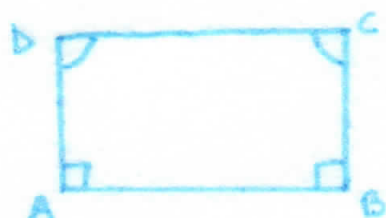
TALE ASSIOMA È IL MENO IMMEDIATO E NON SEMBRA COSÌ EVIDENTE CHE POSSA ESSERE UN POSTULATO, INFATTI MOLTI MATEMATICI, NEL CORSO DEI SECOLI, TENTARONO DI DIMOSTRARE LA SUA DIPENDENZA DAI PRIMI 4.

ALLA FINE DEL 1600, GEROLAMO SACCHERI PENSÒ DI DIMOSTRARE CHE IL V POSTULATO IN REALTÀ ERA UN TEOREMA UTILIZZANDO IL PROCEDIMENTO PER ASSURDO: LO NEGÒ CERCANDO DI ARRIVARE AD UNA CONTRADDIZIONE.

ALL' INIZIO CONSIDERO' LA GEOMETRIA ASSOLUTA, OTTENUTA DA TUTTI I TEOREMI DIMOSTRATI A PARTIRE DAI SOLI PRIMI 4 POSTULATI E POI ADOTTO' LA TECNICA DIMOSTRATIVA A CONTRARIIS:

- SUPPORRE VERA LA NEGAZIONE DEL V POSTULATO
- DEDURRE DAL NUOVO SISTEMA UNA SERIE DI TEOREMI
- PERVENIRE AD UN ASSURDO

COME STRUMENTO DELLA SUA ANALISI EGLI COSTRUIÌ IL QUADRILATERO NOTO COME "QUADRILATERO DI SACCHERI"

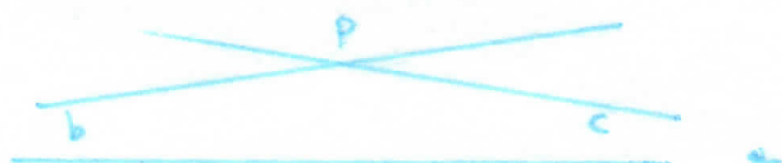


QUESTA FIGURA È FORMATA DA DUE LATI OPPOSTI UGUALI TRA LORO ($\overline{AD} = \overline{BC}$), DA UN LATO PERPENDICOLARE AI SUDDETTI CHIAMATO BASE (\overline{AB}) E DAL LATO OPPOSTO ALLA BASE (\overline{CD}) POICHÈ LA FIGURA PIANA CHE NE DERIVA È UN QUADRILATERO BIRETTANGOLO ISOSCELE, GLI ANGOLI IN C E D DEVONO ESSERE UGUALI, QUINDI CONSIDERO LE 3 IPOTESI:

- GLI ANGOLI ALLA SOMMITÀ SONO RETTI
- SONO OTTUSI
- SONO ACUTI

IL PROCEDIMENTO CONSISTEVA NEL CONSIDERARE LE IPOTESI 2 E 3, PERVENIRE AD UN ASSURDO E DIMOSTRARE COSÌ L'ASSERTO 1. ESAMINANDO L'IPOTESI 2, SACCHERI SI ACCORSE CHE IL V POSTULATO NON ERA DI PER SÈ INCOMPATIBILE CON ESSA, QUINDI ANCHE I TEOREMI DEDOTTI DAL POSTULATO CONTINUAVANO AD ESSERE VERI, TRA QUESTI CONSIDERO QUELLO PER CUI "LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI È UGUALE A 4 ANGOLI RETTI", MA NELL'IPOTESI DELL'ANGOLO OTTUSO LA SOMMA È MAGGIORE

DI 4 RETTI, QUINDI LA SECONDA IPOTESI DECADDE - IN REALTÀ QUESTA IPOTESI NON ERA DECADUTA PERCHÉ NON DIMOSTRÒ INCOERENZA MA SOLO INCOMPATIBILITÀ - POI SACCHERI CONSIDERÒ LA TERZA IPOTESI



SE FOSSE VALIDA, ALLORA, DATI UNA RETTA a E UN PUNTO P ESTERNO E COMPLANARE AD ESSA, NEL FASCIO DI RETTE CHE PASSANO PER IL PUNTO P , ESISTONO 2 RETTE, b E c , CHE SI AVVICINANO AD a SENZA SECARLA E LA CUI DISTANZA DA a DIVENTA SEMPRE MINORE DI UN SEGMENTO PICCOLO A PIACERE - DUNQUE LE RETTE b E c NON INCONTRANO a , MA NEPPURE HANNO UNA PERPENDICOLARE IN COMUNE CON ESSA, O MEGLIO, SIA LA RETTA b CHE LA RETTA c HANNO UNA PERPENDICOLARE IN COMUNE CON a SOLO NEI PUNTI D'INCONTRO ALL'INFINITO - TUTTO CIÒ, SOSTENNE SACCHERI, È CONTRO LA NATURA DELLA RETTA -

SACCHERI PENSO' DI AVER DIMOSTRATO IL V POSTULATO MA IN REALTÀ NON PERVENNE A NESSUN ASSURDO -

GEOMETRIE NON EUCLIDEE

FU SOLO TRA IL 1830 E IL 1860, A PARTIRE DAI LAVORI DI BOLYAI, GAUSS E LOBAČEVISKIJ CHE IL PROBLEMA TROVÒ UNA SOLUZIONE DEFINITIVA: LA NEGAZIONE DEL V POSTULATO DAVA VITA AD ALTRE 2 GEOMETRIE ALTRETTANTO COERENTI, CIOÈ NON CONTRADDITTORIE: LA GEOMETRIA ELLITTICA E LA GEOMETRIA IPERBOLICA. IL V POSTULATO DI EUCLIDE AFFERMA SIA L'ESISTENZA CHE L'UNICITÀ DELLA PARALLELA AD UNA RETTA DATA PASSANTE PER UN PUNTO ESTERNO E SI HANNO 2 MODI PER NEGARLO: AFFERMANDO CHE NON ESISTONO RETTE PARALLELE (GEOMETRIA ELLITTICA), OPPURE, CHE CE NE SIA SEMPRE PIÙ DI UNA, CIOÈ NON VALE L'UNICITÀ (GEOMETRIA IPERBOLICA).

GEOMETRIA ELLITTICA

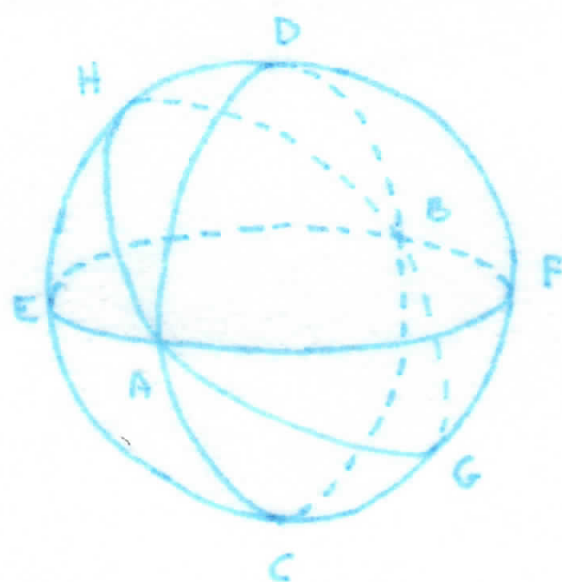
NELLA COSTRUZIONE GEOMETRICA PROPOSTA DA RIEMANN NON VALE L'ESISTENZA DELLA RETTA PARALLELA: "PER UN PUNTO P NON APPARTENENTE AD UNA RETTA r NON SI PUÒ CONDURRE ALCUNA PARALLELA ALLA RETTA DATA"

MODELLO DI RIEMANN:

PIANO DI RIEMANN: UNA QUALSIASI SUPERFICIE SFERICA

PUNTO DI RIEMANN: UNA QUALUNQUE COPPIA DI PUNTI DIAMETRALMENTE OPPOSTI SULLA SUPERFICIE SFERICA

RETTE DI RIEMANN: UNA QUALUNQUE CIRCONFERENZA MASSIMA SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA



(A, B) = PUNTO DI RIEMANN

GEOMETRIA IPERBOLICA

LA GEOMETRIA IPERBOLICA VENNE STUDIATA ATTORNO AL 1830 IN MODO INDIPENDENTE DAI MATEMATICI BOLYAI E LOBAČEVSKIY - NEL 1871 SI DIMOSTRÒ CHE LA GEOMETRIA IPERBOLICA È CONSISTENTE ALMENO QUANTO QUELLA EUCLIDEA - NEL 1866 BELTRAMI DIMOSTRÒ CHE LA SUPERFICIE DI UNA PSEUDOSFERA HA UNA CURVATURA COSTANTE NEGATIVA E CHE LOCALMENTE VALGONO GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA IPERBOLICA, MA NON È ESTENDIBILE ALL'INFINITO - NEL 1954 KUIPER DIMOSTRÒ L'ESISTENZA DI UNA SUPERFICIE ESTENDIBILE ALL'INFINITO DI UN PIANO IPERBOLICO MA NON MOSTRÒ COME COSTRUIRLA - NEL 1956 DIMOSTRÒ UN RISULTATO PIÙ GENERALE CHE SAREBBE STATO RIELABORATO NEL 1966 DA NASH - IL TEOREMA DI NASH-KUIPER È UN RISULTATO MOLTO GENERALE CHE IMPLICA L'ESISTENZA DI UNA COMPLETA SUPERFICIE IN CUI VALE LA GEOMETRIA IPERBOLICA - NEL 1970 A THURSTON VENNE L'IDEE DI USARE DEGLI ANULI DI CARTA PER DESCRIVERE UNA SUPERFICIE IPERBOLICA IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE - NEL 1997 TAIMINA, PARTENDO DAL MODELLO DI CARTA, REALIZZÒ IL PRIMO PIANO IPERBOLICO ALL'UNCINETTO - QUI LE LINEE RETTE SI OTTENGONO PIEGANDO SENZA TIRARE IL PIANO IPERBOLICO ALL'UNCINETTO, COME IN GEOMETRIA EUCLIDEA SI COSTRUISCONO LE LINEE RETTE PIEGANDO UN FOGLIO DI CARTA, MODELLO DI UN PIANO EUCLIDEO.

NOTA PER IL LETTORE

SE LA LETTURA NON BASTASSE A INTERIORIZZARE
GLI ARGOMENTI ESPOSTI C'E' LA POSSIBILITA' DI MANGIARSELI,
INFATTI:

- LA CARTA E L'INCHIOSTRO SONO EDIBILI
- LA COPERTINA PUO' ESSERE USATA COME TOVAGLIETTA DA PICNIC
- IL FERMO E' UNO STUZZICADENTI
- IL PIANO IPERBOLICO ALL'UNCINETTO PUO' FUNGERE DA TOVAGLIOLA

E SE LA DIGESTIONE RISULTASSE LENTA SI PUO' SMALTIRE
IL TUTTO GIOCANDO A PALLA CON IL PIANO ELLITTICO.